CONCOURS ESTP - ENSAM — Filière MP

INFORMATIQUE *durée : 3 heures*

Les quatre exercices et le problème sont indépendants. Indiquez le nom du logiciel ou du langage que vous utilisez.

1 Intégrales et primitives

1. Soient les deux procédures suivantes :
   - Integrale : paramètre a,b réels, f fonction réelle à variable réelle ; retour : $\int_a^b f(t)dt$
   - Primitive : paramètre f fonction réelle à variable réelle; retour primitive de f

   Quels seront les retours des appels: `Integrale(0,1,X->3*X+1)`? `Primitive(X->3*x+1)`?

2. Soit f une fonction numérique définie sue l'intervalle compact $[a,b]$, et pourvue d'une dérivée seconde bornée, justifier rapidement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a:

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right]\right| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \sup_{x\in[a,b]} |f''(x)|$$

   (a) Ecrire une procédure calculant une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ à une précision ε donnée.

   (b) On prend $f(x) = e^{x^2}$ sur $[0,1]$ déterminer la valeur minimale de n permettant d'obtenir une approximation de l'intgrale de f entre 0 et 1 à moins de $\frac{1}{100}$ près.

2 Multiplication : La méthode du pêcheur égyptien

Une très ancienne méthode de multiplication de deux entiers positifs est basée sur le principe suivant :

$$a \cdot b = \begin{cases} a \text{ si } b = 1 \\ (2a).(b/2) \text{ si } b \text{ est pair} \\ (2a).[(b-1)/2] + a \text{ sinon} \end{cases}$$

En n'utillisant que l'addition des entiers et les procédures suivantes

- `EstPair` : paramètre a entier ; retour `Vrai` si a est pair, `Faux` sinon
- `EgalUn` : paramètre a entier ; retour `Vrai` si a est égal à 1, `Faux` sinon
- `Double` : paramètre a entier; retour d entier égal à 2a
- `Moitie` : paramètre a entier; retour m entier égal à la partie entière de a/2

écrire la procédure récursive `mult` basée sur ce principe
`mult` : paramètres `a, b` entiers positifs; retour `m` entier égal au produit a par b.

3 Recherche de maximum d'une fonction

Soit f une fonction réelle continue sur un intervalle $[a,b]$ dont on sait qu'elle possède un seul maximum et aucun minimum sur cet intervalle. Une méthode permettant de calculer ce maximum est la suivante :

On prend deux points x et y dans l'intervalle. Si $f(x) > f(y)$ alors le maximum se trouve entre a et y. Si $f(x) < f(y)$ alors le maximum se trouve entre x et b. Le problème est alors ramené à la recherche d'un maximum sur un intervalle plus petit. Le maximum sera trouvé lorsque l'intervalle sera suffisamment petit.

1. Ecrire la procédure maxi basée sur ce principe, en explicitant la manière de tester si l'intervalle est suffisamment petit :

   `maxi` : paramètres `f` fonction, `a,b` réels; retour `m` réel tel que `f(m)` maximum sur $[a,b]$

2. Comment choisir x et y de manière à minimiser le nombre d'évaluations de f en un point ? (question difficile)

4 Calcul de π : la méthode d'Archimède

Archimède a proposé l'algorithme suivant pour le calcul de π :
On considère un cercle de rayon 1/2 et l'on note p_n le périmètre du polygone régulier inscrit de 2^n côtés.

1. Calculer p_n, étudier son sens de variation et sa limite, donner un équivalent de $\pi - p_n$ et, à l'aide de l'inégalité de Taylor-Lagrange, prouver que :

$$0 < \pi - p_n \leq \frac{1}{6.4^{n-3}}$$

2. Donner p_1, exprimer p_{n+1} en fonction de p_n et montrer que l'on a :

$$p_{n+1} = \frac{p_n}{c_{n+1}} \quad \text{avec } c_1 = 0 \quad \text{et } c_{n+1} = \sqrt{\frac{1+c_n}{2}}$$

3. En déduire une procédure permettant d'obtenir à l'aide des suites (p_n) et (c_n) une valeur approchée de π à une précision (raisonnable) donnée.

5 Probléme : l'arithmétique des intervalles

Les ingénieurs travaillent souvent sur des intervalles de valeurs plutôt que sur des valeurs simples. Par exemple, si on sait qu'une quantité x est comprise entre 3,14 et 3,15 et une quantité y est comprise entre 2,71 et 2,72, la quantité $x + y$ sera comprise entre 5,85 et 5,87. Le but de ce problème est d'écrire les utilitaires permettant de travailler sur des intervalles réels. On supposera toujours les intervalles fermés bornés (de type $[a, b]$)

1. **Extension d'une loi à l'ensemble des intervalles** Soit la loi $*$ définie sur $\mathbb{R}$; si I et J sont deux intervalles, on pose
$$I * J = \{x / \exists a \in I, \exists b \in J, x = a * b\}$$
Déterminer $I + J$, $I - J$, $I \times J$
A quelle condition l'ensemble I/J est un intervalle. Déterminer sous cette condition I/J
On définit l'opposé d'un intervalle I par $-I = [0,0] - I$ et l'inverse par $I^{-1} = [1,1]/J$

2. On représente un intervalle fermé $[a, b]$ par l'expression symbolique à deux opérandes $a..b$. Si `i` est un intervalle $a..b$, la fonction `op(1,i)` retourne la borne inférieur a de `i`, de même `op(2,i)` retourne la borne supérieur b de l'intervalle `i`.
Écrire les procédures suivantes :
   - `i_add` : paramètres `i1,i2` intervalles; retour `i` intervalle somme de `i1` et `i2`
   - `i_sub` : paramètres `i1,i2` intervalles; retour `i` intervalle différence de `i1` et `i2`
   - `i_mult` : paramètres `i1`, `i2` intervalles; retour1 intervalle produit de `i1` et `i2`
   - `i_inv` : paramètre `i` intervalle; retour `i` intervalle inverse de `i`
   - `i_div` : paramètres `i1`, `i2` intervalles; retour1 intervalle quotient de `i1` et `i2`

3. Un ingénieur travaille plutôt sur des valeurs avec tolérance. Par exemple, si deux résistances de R_1 (40 ohms tolérance 2%) et R_2 (60 ohms tolérance 3%) sont montées en parallèles, la valeur de la résistance équivalente sera comprise entre $\frac{1}{\frac{1}{39.2}+\frac{1}{58.2}}$, soit 23,423 et $\frac{1}{\frac{1}{40.8}+\frac{1}{61.8}}$, soit 24,575. Réécrire les procédures précédentes pour pouvoir faire des calculs sur des valeurs avec tolérance.

4. On représente un intervalle I par un couple (μ, Δ) où μ est le milieu de l'intervalle $\mu = \frac{a+b}{2}$ et Δ son amplitude $\Delta = \frac{b-a}{2}$. On appelle amplitude relative de l'intervalle I la valeur $\delta = \frac{\Delta}{\mu}$. Montrer que pour Δ assez petit on a
$$\Delta(I \pm J) \simeq \Delta(I) + \Delta(J)$$
$$\delta(I \times J) \simeq \delta(I) + \delta(J)$$
$$\delta(I/J) \simeq \delta(I) + \delta(J)$$
En déduire que si R_1, R_2 et R sont trois intervalles liés par $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ alors : $\frac{\delta(R)}{\mu(R)} \simeq \frac{\delta(R_1)}{\mu(R_1)} + \frac{\delta(R_2)}{\mu(R_2)}$
Retrouver à l'aide de cette dernière formule la résistance équivalente de $R_1 = 40\Omega$ (2%) et $R_2 = 60\Omega$ (3%) montées en parallèlles.